№8 дәріс сабағы
Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың үлестірім тығыздығы. Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың сипаттамалары.

Үзіліссіз X кездейсоқ шамасының үлестірім заңдылығы үлестірім функциясы (интегралдық функция) арқылы беріледі. X дискретті кездейсоқ шамасы үшін $F(x) = \sum_{x_i<x} P(X = x_i)$, ал үзіліссіз кездейсоқ шама үшін – сынақ нәтижесінде X кездейсоқ шамасының x нүктесінің сол жағына қарай орналасу ықтималдығы: $F(x) = P(X < x)$. Үзіліссіз X шамасының үлестірімінің әртүрлі нүктелердің маңайындағы сипаттамаларын $F(x)$ функциясына қарағанда үлестірім тығыздығы (дифференциалдық функция) $f(x) = F'(x)$ толығырақ сипаттайды.

$F(x)$ *үлестірім функциясының қасиеттері.*

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$
3. $F(x)$- кемімелі емес функция
4. $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1.$

$f(x)$ *үлестірім тығыздығының қасиеттері*

1. $f(x) \ge 0$
2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$
3. $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Үзіліссіз үлестірімнің мысалдары:

1. Бірқалыпты үлестірім $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0 \quad , & x \notin [a,b] \end{cases}, \ -\infty < a < b < \infty.$

2. Қалыпты үлестірім $f\ (x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty < a < +\infty, \ \sigma > 0$

3.Көрсеткіштік үлестірім $f\ (x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0 \quad , & x < 0, \end{cases} \ ,\lambda > 0.$

4.Коши үлестірімі $f\ (x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$

2.2.2 Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары

1. X үзіліссіз кездейсоқ шамасының математикалық күтімі деп

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

саны аталады.

2. X үзіліссіз кездейсоқ шамасы үшін дисперсияны есептеу формуласы:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)\,dx$$

немесе

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx-\left[M(X)\right]^2$$

3. Кездейсоқ шаманың орташа квадраттық ауытқуы:

$$\sigma=\sqrt{D(X)}\,.$$

4.Үзіліссіз кездейсоқ шаманың k-ші ретті бастапқы моменті:

$$\upsilon_k(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

5. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың k-ші ретті орталық моменті:

$$\mu_k(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^k f(x)dx\,.$$

6. Егер кездейсоқ шаманың белгілі бір M_0 мәнінде $f_{\max}=f(M_0)$ теңдігі орындалса, онда M_0 кездейсоқ шаманың модасы деп аталады.

7. Егер кездейсоқ шаманың белгілі бір M_D мәнінде $P(X<M_D)=P(X>M_D)$ теңдігі орындалса, онда M_D кездейсоқ шаманың медианасы деп аталады.

8. Кездейсоқ шаманың өзінің математикалық күтімі бойынша симметриядан ауытқуы, оның A_s асимметриясы деп аталады:

$$A_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3}\,.$$

Егер кездейсоқ шаманың үлестірімі математикалық күтімі бойынша симметриялы болса, онда $A_s=0$. Егер $A_s>0$ болса, онда дифференциалдық функцияның графигі сол жаққа қарай «созыңқы» болады, ал $A_s<0$ болса, онда оң жаққа қарай «созыңқы» болады

9. Қалыпты үлестіріммен салыстырғанда дифференциалдық функцияның графигінің «жатыңқылық» деңгейін анықтайтын шаманы E_k эксцесс деп атайды:

$$E_k=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3.$$

Мұнда қалыпты үлестірім үшін $E_k=0$. Егер $E_k>0$ болса, онда Гаусс қисығымен салыстырғанда график «көтеріңкі» болады. Ал егер $E_k<0$ болса, онда график «жатыңқы» болады.

X кездейсоқ шамасының берілген аралықтағы мәнді қабылдау ықтималдығын есептеу формуласы:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1), \quad P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

2.2.3 Математикалық күтім пен дисперсияның қасиеттері

1. Тұрақты санның математикалық күтімі тұрақты санның өзіне тең: $M(C) = C,$ мұндағы $C - const$.

2. Кездейсоқ шамалардың қосындысының математикалық күтімі олардың математикалық күтімдерінің қосындысына тең: $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

3. Тәуелсіз кездейсоқ шамалардың көбейтіндісінің математикалық күтімі олардың математикалық күтімдерінің көбейтіндісіне тең: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$

4. Тұрақты санның дисперсиясы нөлге тең: $D(C) = 0,$ мұндағы $C - const$.

5. Тәуелсіз кездейсоқ шамалардың қосындысының дисперсиясы олардың дисперсияларының қосындысына тең: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.